Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Soluţii - clasa a XI-a

Subiectul I

a) Formăm un determinant Δ de ordin 4, care are ca minori ai elementelor coloanei a patra determinanţii daţi (permutaţi în mod convenabil), iar pe coloana a patra elementele sunt 1. Atunci $\Delta = 0$ şi este egal cu $d_1 - d_2 + d_3 - d_4$. . . . . **5 puncte**

b) Folosind coordonate, din ipoteză rezultă că dreptele care trec prin (a_1, a_2), (d_1, d_2) şi (b_1, b_2), (c_1, c_2) sunt paralele; la fel dreptele care trec prin (a_1, a_2), (b_1, b_2) şi (c_1, c_2), (d_1, d_2). Obţinem astfel un paralelogram şi, folosindu-l, avem concluzia. . . . **4 puncte**

Subiectul II

a) Avem, de exemplu, soluţiile $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & -a \end{pmatrix}$ . . . . **4 puncte**

b) Dacă n este par şi X_2 este matricea de la a), avem soluţiile

$$\begin{pmatrix} X_2 & \dots & O_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ O_2 & \dots & X_2 \end{pmatrix}.$$

Dacă n este impar, ecuaţia este echivalentă cu $(X + a/2I_n)^2 = (a^2/4 - b)I_n$, care nu are soluţii în cazul în care $a^2 - 4b < 0$, deoarece determinanţii matricelor din cei doi membri ai ecuaţiei au semne opuse. . . . . **5 puncte**

Subiectul III (I. Crişan, G.M.B.)

a) Fiind compunere şi cât de funcţii care au limită finită şi nenulă, funcţia dată are limită în orice punct din $(0, \infty) \setminus \{e^k | k \in \mathbb{Z}\}$. În punctele de forma e^k limitele laterale sunt diferite, deci limita nu există. De asemenea, nu există limita în 0 (luăm şirurile $f(e^{-n})_{n\geq 1} \to 1$ şi $f(e^{-n+1/2})_{n\geq 1} \to e^{1/2}$) şi la ∞ (luăm şirurile $f(e^n)_{n\geq 1} \to 1$ şi $f(e^{n+1/2})_{n\geq 1} \to e^{1/2}$) . . . . **5 puncte**

b) Pentru $1 < a \leq e$ luăm $x_n = [ae^n]$. Pentru $n \geq n_0$ astfel încât $ae^n - 1 > e^n$ avem $[\ln x_n] = n$, deci $a - e^{-n} \leq f(x_n) \leq a$ şi $f(x_n) \to a$. Pentru $a = 1$ putem lua $x_n = [e^n] + 1$. . . . . **4 puncte**

Subiectul IV

a) Dacă luăm a n – a zecimală a lui b egală cu a n – a zecimală a lui x_{n+1}, atunci $|b - x_{p+1}| \leq 10^{-p}$, $\forall p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n) \to b$. . . . . **3 puncte**

b) Da. Dacă luăm $a = 0{,}100100\dots$ şi $x_{n+1} = x_n$ pentru $n \neq 10^p$, atunci b are grupuri de cifre de forma 100100 . . . oricât de lungi, dar nu are perioada 100. **3 puncte**

c) Dacă a are toate zecimalele nule, cu excepţia celor de pe poziţiile de forma 10^p, atunci, deoarece o zecimală nu se poate deplasa decât cu cel mult trei poziţii, orice b are grupuri de cifre nule oricât de lungi, dar nu are perioada 0. . . . . **3 puncte**